COMMUNITY
무료학습 50
합격수기 55
학습자료 625
자유게시판 1289
전기스쿨 이벤트 9
문제복원 게시판 371
문제복원 자료실 37
관리자용 172

학습자료

김대호 2018-01-16 21:57:27

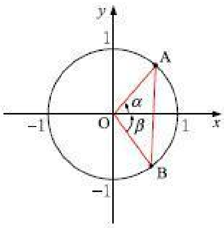
삼각함수 배각공식 반각공식 조회 1 추천 0

글자크게 글자작게

1. 삼각함수의 합의 공식(덧셈정리) 증명

삼각함수의 덧셈정리

두 각 α, β의 차 $\alpha+\beta$의 삼각함수를 각 α, β에 대한 삼각함수를 사용하여 나타내는 방법에 대하여 알아보자.



왼쪽 그림과 같이 각의 크기가 α, $-\beta$를 나타내는 동경과 단위원 O의 교점을 각각 A, B라 하면

$$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\quad B(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$$

이고, $\angle AOB = \alpha+\beta$이다.

이 때, $\triangle AOB$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OB}\cos(\alpha+\beta) \quad \cdots ①$$

이다. 그런데 두 점 A, B 사이의 거리가

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \{\cos\alpha - \cos(-\beta)\}^2 + \{\sin\alpha - \sin(-\beta)\}^2\\ &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2\\ &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

이고, $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$

이므로 이것을 ①에 대입하여 정리하면

$$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

따라서,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots ②$$

이다. 이것을 코사인의 덧셈정리라고 한다.

코사인의 덧셈정리

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

에 α 대신 $\alpha - \frac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta - \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta$$

가 성립한다. 따라서

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

이다. 이것을 사인의 덧셈정리라고 한다.

2. 2배각 공식 증명

사인의 덧셈정리 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$에서 $\beta = \alpha$로 놓으면

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

즉, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

이다. 이 식을 사인의 배각공식이라고 한다.

또, 코사인의 덧셈정리 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$에서 $\beta = \alpha$로 놓으면

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

그런데 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$이므로

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

이다. 이 식을 코사인의 배각공식이라고 한다.

같은 방법으로 탄젠트의 덧셈정리를 이용하면

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

가 성립함을 알 수 있다. 이 식을 탄젠트의 배각공식이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
③ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

위 공식을 삼각함수의 배각공식이라고 한다.

3. 반각 공식 (증명)

코사인의 배각공식

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

에서 α 대신 $\frac{\alpha}{2}$를 대입하면

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

이므로 $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

이다. 또 위 식에서

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

임을 알 수 있다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

① $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

② $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

③ $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

위 공식을 **삼각함수의 반각공식**이라고 한다.

[출처] 삼각함수 합의 공식(2배각 공식, 반각공식 등) 증명 | 작성자 와우샘

추천 | 소스보기 | 수정 | 삭제 | 답변 | 목록보기

댓글쓰기