COMMUNITY

무료학습 [50]
합격수기 [53]
학습자료 [600]
자유게시판 [1287]
전기스쿨 이벤트 [9]
문제복원 게시판 [371]
문제복원 자료실 [37]
관리자용 [168]

학습자료

김대호 교수 2017-02-21 02:01:30

부분분수 전개방법 조회 103 추천 4 글자크게 글자작게

첨부파일 : 1514351536-32.pdf

(1) 분모가 일차식으로만 인수분해될 때

$$\frac{s-d}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{p}{s-a}+\frac{q}{s-b}+\frac{r}{s-c}$$

로 부분분수 전개를 할 때 각 항의 분자 p , q , r 을 구해봅시다.

$\frac{p}{s-a}+\frac{q}{s-b}+\frac{r}{s-c}=\frac{p}{s-a}+\mathrm{U}(s)$ 라 두면

$$\frac{s-d}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{p}{s-a}+\mathrm{U}(s)$$

양변에 $s-a$ 를 곱하면

$$\frac{s-d}{(s-b)(s-c)}=(s-a)\mathrm{U}(s)+p$$

$s=a$ 를 대입하면

$$p=\left[\frac{s-d}{(s-b)(s-c)}\right]_{s=a}$$

같은 방법으로

$$q=\left[\frac{s-d}{(s-a)(s-c)}\right]_{s=b}$$

$$r=\left[\frac{s-d}{(s-a)(s-b)}\right]_{s=c}$$

이제 분모에 일차식의 거듭제곱이 있을 경우를 생각해봅시다.

$$\frac{s-c}{(s-a)^3(s-b)}=\frac{p}{(s-a)^3}+\frac{q}{(s-a)^2}+\frac{r}{s-a}+\frac{t}{s-b}$$

$\frac{p}{(s-a)^3}+\frac{q}{(s-a)^2}+\frac{r}{s-a}+\frac{t}{s-b}=\frac{p}{(s-a)^3}+\mathrm{U}(s)$ 라 두면

$$\frac{s-c}{(s-a)^3(s-b)}=\frac{p}{(s-a)^3}+\mathrm{U}(s)$$

$$\frac{s-c}{s-b}=(s-a)^3\mathrm{U}(s)+p$$

$s=a$ 를 대입하면

$$\therefore\ p=\left[\frac{s-c}{s-b}\right]_{s=a}$$

$\frac{p}{(s-a)^3}+\frac{q}{(s-a)^2}+\frac{r}{s-a}+\frac{t}{s-b}=\frac{q}{(s-a)^2}+\mathrm{U}(s)$ 라 두면

$$\frac{s-c}{(s-a)^3(s-b)}=\frac{q}{(s-a)^2}+\mathrm{U}(s)$$

$$\frac{s-c}{s-b}=(s-a)^3\mathrm{U}(s)+q(s-a)$$

양변을 s에 대해 미분하면

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s-c}{s-b}\right)=3(s-a)^2\mathrm{U}(s)+(s-a)^3\mathrm{U}'(s)+q$$

$s=a$ 를 대입하면

$$\therefore\ q=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s-c}{s-b}\right)\right]_{s=a}$$

$$\frac{p}{(s-a)^3}+\frac{q}{(s-a)^2}+\frac{r}{s-a}+\frac{t}{s-b}=\frac{r}{s-a}+\mathrm{U}(s)$$ 라 두면

$$\frac{s-c}{(s-a)^3(s-b)}=\frac{r}{s-a}+\mathrm{U}(s)$$

$$\frac{s-c}{s-b}=(s-a)^3\mathrm{U}(s)+r(s-a)^2$$

양변을 s에 대해 미분하면

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s-c}{s-b}\right)=3(s-a)^2\mathrm{U}(s)+(s-a)^3\mathrm{U}'(s)+2r(s-a)$$

다시 양변을 s에 대해 미분하면

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s-c}{s-b}\right)=6(s-a)\mathrm{U}(s)+6(s-a)^2\mathrm{U}'(s)+(s-a)^3\mathrm{U}''(s)+2r$$

$s=a$ 를 대입하면

$$\therefore r=\left[\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s-c}{s-b}\right)\right]_{s=a}$$

$$\frac{p}{(s-a)^3}+\frac{q}{(s-a)^2}+\frac{r}{s-a}+\frac{t}{s-b}=\frac{t}{s-b}+\mathrm{U}(s)$$ 라 두면

$$\frac{s-c}{(s-a)^3(s-b)}=\frac{t}{s-b}+\mathrm{U}(s)$$

$$\frac{s-c}{(s-a)^3}=(s-b)\mathrm{U}(s)+t$$

$s=b$ 를 대입하면

$$\therefore t=\left[\frac{s-c}{(s-a)^3}\right]_{s=b}$$

일반적으로 아래와 같습니다.

$$\frac{q(s)}{(s-a)^n p(s)}=\frac{c_1}{(s-a)^n}+\frac{c_2}{(s-a)^{n-1}}+\frac{c_3}{(s-a)^{n-2}}+\frac{c_4}{(s-a)^{n-3}}+\cdots\cdots$$

$$c_1=\left[\frac{1}{0!}\left(\frac{q(s)}{p(s)}\right)\right]_{s=a}$$

$$c_2=\left[\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{q(s)}{p(s)}\right)\right]_{s=a}$$

$$c_3=\left[\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{q(s)}{p(s)}\right)\right]_{s=a}$$

$$c_4=\left[\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{q(s)}{p(s)}\right)\right]_{s=a}$$

$\cdots\cdots$

(예제)

$$\frac{48}{s(s-1)^2(s+1)^4}=\frac{a}{s}+\frac{b_1}{(s-1)^2}+\frac{b_2}{s-1}+\frac{c_1}{(s+1)^4}+\frac{c_2}{(s+1)^3}+\frac{c_3}{(s+1)^2}+\frac{c_4}{s+1}$$

$$a=\left[\frac{48}{(s-1)^2(s+1)^4}\right]_{s=0}=\frac{48}{(-1)^2\cdot 1^4}=48$$

$$b_1=\left[\frac{48}{s(s+1)^4}\right]_{s=1}=\frac{48}{1\cdot 2^4}=3$$

$$b_2=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{48}{s(s+1)^4}\right)\right]_{s=1}=\left[-\frac{48(5s+1)}{s^2(s+1)^5}\right]_{s=1}=-\frac{48\cdot 6}{1^2\cdot 2^5}=-9$$

$$c_1=\left[\frac{48}{s(s-1)^2}\right]_{s=-1}=\frac{48}{(-1)\cdot(-2)^2}=-12$$

$$c_2=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{48}{s(s-1)^2}\right)\right]_{s=-1}=\left[-\frac{48(3s-1)}{s^2(s-1)^3}\right]_{s=-1}=-\frac{48\cdot(-4)}{(-1)^2\cdot(-2)^3}=-24$$

$$c_3=\left[\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{48}{s(s-1)^2}\right)\right]_{s=-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{96(6s^2-4s+1)}{s^3(s-1)^4}\right]_{s=-1}=\frac{96\cdot 11}{2\cdot(-1)^3\cdot(-2)^4}=-33$$

$$c_4=\left[\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{48}{s(s-1)^2}\right)\right]_{s=-1}=\frac{1}{6}\left[-\frac{96(30s^3-30s^2+15s-3)}{s^4(s-1)^5}\right]_{s=-1}=-\frac{96\cdot(-78)}{6\cdot(-1)^4\cdot(-2)^5}=-39$$

$$\therefore\ \frac{48}{s(s-1)^2(s+1)^4}=\frac{48}{s}+\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{9}{s-1}-\frac{12}{(s+1)^4}-\frac{24}{(s+1)^3}-\frac{33}{(s+1)^2}-\frac{39}{s+1}$$

(2) 분모가 2차 이상의 식으로 인수분해될 때

이 때는 미정계수법을 이용하여 문제를 해결합니다.

$$\frac{7s}{(s-1)(s^2+2s+4)}=\frac{a}{s-1}+\frac{bs+c}{s^2+2s+4}$$

위와 같이 부분분수 전개될 때 a, b, c 를 구해봅시다.

참고로 부분분수 전개될 때 분모가 n차식이면 분자는 (n-1)차식으로 두어여 합니다.

위 문제의 경우 s-1 의 분자는 상수항, s^2+2s+4 의 분자는 일차식으로 두어야 합니다.

우변을 통분하면

$$\frac{a}{s-1}+\frac{bs+c}{s^2+2s+4}=\frac{a(s^2+2s+4)+(bs+c)(s-1)}{(s-1)(s^2+2s+4)}=\frac{(a+b)s^2+(2a-b+c)s+(4a-c)}{(s-1)(s^2+2s+4)}$$

따라서

$$\frac{7s}{(s-1)(s^2+2s+4)}=\frac{(a+b)s^2+(2a-b+c)s+(4a-c)}{(s-1)(s^2+2s+4)}$$

이 되며

분자를 비교하면

$$7s=(a+b)s^2+(2a-b+c)s+(4a-c)$$

위 식은 s 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하는 s 에 대한 항등식이므로 양변의 계수가 서로 같아야 합니다.

a+b = 0 , 2a-b+c = 7 , 4a-c = 0

연립하여 풀면

a=1 , b=-1 , c=4

$$\therefore \frac{7s}{(s-1)(s^2+2s+4)} = \frac{1}{s-1} + \frac{-s+4}{s^2+2s+4} = \frac{1}{s-1} - \frac{s-4}{s^2+2s+4}$$

※ 두번째 방법은 분모가 일차식의 곱으로만 인수분해되는 식에서도 사용할 수 있으며

더 이상 인수분해가 되지 않는 이차식을 복수소을 포함하는 일차식으로 인수분해하여 첫번째 방법으로

해결할 수도 있습니다.

$$ex)\ \frac{2}{s(s^2+1)} = \frac{2}{s(s+i)(s-i)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+i} + \frac{c}{s-i}$$

$$a = \left[\frac{2}{s^2+1}\right]_{s=0} = 2$$

$$b = \left[\frac{2}{s(s-i)}\right]_{s=-i} = \frac{2}{(-i)\cdot(-2i)} = -1$$

$$c = \left[\frac{2}{s(s+i)}\right]_{s=i} = \frac{2}{i\cdot 2i} = -1$$

$$\therefore \frac{2}{s(s^2+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+i} - \frac{1}{s-i}$$

추천 소스보기 수정 삭제 답변 목록보기

댓글쓰기